Г. С. Цейтин, О сложности вывода в исчислении высказываний, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1968, том 8, 234–259

Г.С.Цейтин

О СЛОЖНОСТИ ВЫВОДА В ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ[ж)]

§ I. Постановка задачи и основные результаты

В этой статье рассматривается вопрос о минимальной сложности вывода заданной формулы в классическом исчислении высказываний и доказывается, что для различных разновидностей исчисления высказываний эти оценки могут существенно различаться. Те разновидности исчисления высказываний, которые используются в данной статье, несколько необычны[жж)], но результаты, полученные для них, в принципе могут быть перенесены на обычные формы исчисления высказываний.

Простейшими объектами, рассматриваемыми в описываемых исчислениях, служат пропозициональные переменные, которые мы объединяем в пары (каждая переменная входит только в одну пару; количество таких пар не ограничено). Переменные, входящие в одну пару, будем называть с о п р я ж е н н ы м и; если ξ обоз-

---

ж) Содержание этой работы было доложено на Ленинградском семинаре по математической логике 8,22 и 29 сентября 1966 г.

жж) Аналогичная система для исчисления предикатов введена в [3].

начает переменную, то сопряженная ей переменная обозначается $\bar{\xi}$
Д и з ъ ю н к ц и е й будем называть любое конечное множество переменных; для записи такой дизъюнкции будем выписывать в строчку (в любом порядке, без промежуточных знаков) все входящие в нее переменные, пустую дизъюнкцию будем обозначать Λ. Наконец, мы будем рассматривать конечные системы дизъюнкций.

Припишем каждой из переменных каким-нибудь образом одно из двух логических значений — 1 (истина) или 0 (ложь), но так, чтобы сопряженным переменным были приписаны различные значения. Тогда дизъюнкции приписывается значение 1, если это значение приписано хотя бы одной из входящих в нее переменных, и 0 в противном случае; в частности, пустая дизъюнкция всегда получает значение 0. Система дизъюнкций называется **в ы п о л н и м о й**, если можно приписать значения переменным таким образом, что все дизъюнкции этой системы получат значение 1; если система дизъюнкций не является выполнимой, называем ее **п р о т и в о р е ч и в о й**.

Исчисления, которыми мы будем пользоваться, направлены на установление противоречивости систем дизъюнкций. Понятие противоречивой системы дизъюнкций служит здесь аналогом понятия тождественно истинной формулы в обычном исчислении высказываний. От вопроса о тождественной истинности заданной формулы исчисления высказываний можно перейти к вопросу о противоречивости некоторой системы дизъюнкций, приведя отрицание данной формулы к конъюнктивной нормальной форме. Однако при таком преобразовании может резко возрасти длина формулы, поэтому мы будем рассматривать другой способ перехода от формулы исчисления высказываний к системе дизъюнкций. Каждой подформуле данной формулы поставим в соответствие свою переменную; двум подформулам будут соответствовать сопряженные переменные в том и только том случае, если одна из этих подформул является отрицанием второй. Если некоторая подформула $\mathcal{A}$ представляет собой конъюнкцию подформул $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ и этим подформулам приписаны соответственно переменные α, β и γ, то припишем подформуле $\mathcal{A}$ следующую систему дизъюнкций: $\bar{\alpha}\beta$, $\bar{\alpha}\gamma$, $\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}$. Аналогично припишем системы дизъюнкций подформулам, которые представляют собой дизъюнкции и импликации ($\alpha\bar{\beta}$, $\alpha\bar{\gamma}$ и $\bar{\alpha}\beta\gamma$ для дизъюнкции и $\alpha\beta$, $\alpha\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma$ для импликации). Объединим все полученные таким способом системы дизъюнкций и добавим туда еще дизъюнкцию $\bar{\xi}$, где ξ – переменная, соответствующая всей данной формуле. Легко видеть, что полученная система дизъюнкций противоречива в том и только том случае, если данная формула тождественно истинна.

Пусть дана некоторая система дизъюнкций. Мы будем по определенным правилам дополнять эту систему новыми дизъюнкциями так, чтобы из выполнимости исходной системы следовала выполнимость дополненной системы. Такая операция может применяться последовательно много раз. Если мы в конце концов получим пустую дизъюнкцию, то это будет означать, что исходная система дизъюнкций противоречива: в самом деле, система дизъюнкций, содержащая пустую дизъюнкцию, не может быть выполнимой. Мы рассмотрим два правила для дополнения системы дизъюнкций без нарушения ее выполнимости.

Правило I ("Аннигиляция"). Если система содержит дизъюнкции $A\xi$ и $B\bar{\xi}$ (здесь ξ – переменная, A и B – некоторые дизъюнкции), то можно дополнить систему дизъюнкцией $A \cup B$ (знак $\cup$ употребляется как знак теоретико-множественного объединения). Действительно, если при некотором наборе значений переменных дизъюнкции $A\xi$ и $B\bar{\xi}$ обе получили значение I, то дизъюнкция $A \cup B$ также получит значение I.

Правило 2 ("Расширение"). Если α , β , γ - какие-нибудь переменные, причем ни α , ни $\bar{\alpha}$ не входят ни в одну из дизъюнкций системы, то систему можно дополнить следующим списком дизъюнкций: $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$. Действительно, если переменным приписаны значения таким образом, что все дизъюнкции исходной системы получили значение 1, то это не зависит от значения переменной α ; припишем переменной α то же значение, что и дизъюнкции $\bar{\beta}\bar{\gamma}$, тогда вновь вводимые дизъюнкции получат значение 1, а значения прежних дизъюнкций не изменятся.

Для применения правила аннигиляции нужно лишь знать, что две определенные дизъюнкции входят в систему. Поэтому, если мы пользуемся только этим правилом, то можно считать, что мы имеем дело с исчислением, в котором выводимые объекты представляют собой отдельные дизъюнкции: дизъюнкции, входящие в первоначальную систему, играют роль аксиом, правило аннигиляции служит правилом вывода, а "цель" вывода - получить пустую дизъюнкцию. Если же при установлении противоречивости системы дизъюнкций мы пользуемся и правилом расширения, то будем считать, что все применения этого правила предшествуют применениям правила аннигиляции, а дизъюнкции, полученные по правилу расширения, приравняем к аксиомам; таким образом, на правило расширения мы смотрим не как на правило вывода, а как на схему порождения новых аксиом.

Итак, мы будем рассматривать следующее исчисление (обозначаем его буквой $\mathfrak{A}$): выводимые объекты представляют собой дизъюнкции, аксиомы не фиксируются, а единственное правило вывода разрешает из дизъюнкций $A\xi$ и $B\bar{\xi}$ выводить дизъюнкцию $A\cup B$. Применение этого правила будем называть а н н и г и л я ц и е й переменных ξ и $\bar{\xi}$. Если дана система дизъюнкций Σ и мы можем, приняв в качестве аксиом все дизъюнкции из Σ (применение правила расширения не допускается), вывести в исчислении $\mathfrak{A}$ дизъюнкцию A, то будем писать $\Sigma \vdash A$. Нетрудно доказать следующую теорему ж) о полноте исчисления $\mathfrak{A}$.

<u>Теорема I.</u> Система дизъюнкций Σ противоречива тогда и только тогда, когда $\Sigma \vdash \Lambda$.

(Доказывается индукцией по числу переменных, входящих в Σ; см. лемму 2 в § 2).

Из этой теоремы видно, что правило расширения является лишним, если нас интересует только установление противоречивости некоторой системы дизъюнкций. Однако, как увидим ниже, применение этого правила позволяет существенно уменьшать сложность выводов.

Вывод в исчислении $\mathfrak{A}$ (далее будем говорить просто "вывод") можно записывать как в виде линейной последовательности формул, так и в виде дерева. Если измерять сложность вывода количеством вхождений дизъюнкций в этот вывод, то для линейной и древесной записи одного и того же вывода могут получиться разные величины из-за того, что в дерево одна и та же дизъюнкция может входить несколько раз. Мы всегда будем рассматривать древесную запись, но будем употребять два способа оценки сложности. L-сложностью вывода мы будем называть количество вхождений аксиом в дерево (так как каждое вхождение дизъюнкции, кроме аксиом, имеет ровно две посылки, то общее количество вхождений дизъюнкций в дерево равно удвоенной L-сложности минус I). N-сложностью вывода мы будем называть количество различных дизъюнкций, входящих в этот вывод (это, очевидно, соответствует длине вывода в линейной записи).

ж) См. также [3]

Если Σ - система дизъюнкций, а A - такая дизъюнкция, что $\Sigma \vdash A$, то через $L_A(\Sigma)$ (соответственно, $N_A(\Sigma)$) будем обозначать минимальную L -сложность (соответственно, N -сложность) вывода дизъюнкции A из Σ. Нас будет интересовать главным образом случай, когда $A = \Lambda$, и тогда мы будем писать $L(\Sigma)$ и $N(\Sigma)$.

Теорема 2. Для любой противоречивой системы дизъюнкций Σ

$$\frac{N(\Sigma)+1}{2} \leq L(\Sigma) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{N(\Sigma)-1}.$$

Здесь верхняя оценка для $L(\Sigma)$ получается следующим способом. Вывод Λ из Σ с минимальной N -сложностью записывается линейно, и индукцией по n доказывается, что если $A - n$ -ая по счету дизъюнкция в этом выводе, то $L_A(\Sigma) \leq \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]$; при этом внутри данного вывода могут производиться небольшие перестройки.

Каждому вхождению дизъюнкции в вывод соответствует поддерево - часть всего дерева, образующая вывод рассматриваемого вхождения. Будем называть вывод регулярным, если каждое его поддерево удовлетворяет следующему условию: в поддереве нигде не встречается аннигиляции переменных, входящих в конечную дизъюнкцию этого поддерева. Для вывода пустой дизъюнкции условие регулярности равносильно тому, что на одной ветви вывода не встречается дважды аннигиляция одной и той же переменной.

Если Σ - система дизъюнкций, для которой $\Sigma \vdash \Lambda$, то через $\overline{L}(\Sigma)$ (соответственно, $\overline{N}(\Sigma)$) обозначаем минимальную L -сложность (соответственно, N -сложность) регулярного вывода Λ из Σ. Очевидно, $\bar{L}(\Sigma)\geqslant L(\Sigma)$ и $\bar{N}(\Sigma)\geqslant N(\Sigma)$. Кроме того, очевидно, $\bar{L}(\Sigma)\geqslant \frac{\bar{N}(\Sigma)+1}{2}$. Имеет место также следующая теорема.

Теорема 3. Для любой противоречивой системы дизъюнкций Σ

$$\bar{L}(\Sigma)=L(\Sigma).$$

Иными словами, минимальная L -сложность всегда достигается на регулярных выводах. Доказательство этого основано на следующем утверждении: если $\Sigma\vdash A$, то по любой дизъюнкции B можно построить такую дизъюнкцию C, что $C\subset(A\cup B)$ и существует регулярный вывод C из Σ, имеющий L -сложность не больше $L_A(\Sigma)$ (доказывается индукцией по $L_A(\Sigma)$).

Остается открытым вопрос, существует ли такая противоречивая система дизъюнкций Σ, что $\bar{N}(\Sigma)>N(\Sigma)$.

Определим, наконец, величины $L^*(\Sigma)$, $N^*(\Sigma)$ и $\bar{N}^*(\Sigma)$ для произвольной противоречивой системы дизъюнкций Σ как минимальные значения величин, соответственно, $L(\Sigma^*)$, $N(\Sigma^*)$ и $\bar{N}(\Sigma^*)$, где Σ^* пробегает любые системы дизъюнкций, полученные из Σ применением (многократным) правила расширения (для определения этих величин, очевидно, достаточно рассматривать не любые системы Σ^*, а лишь такие, при построении которых введено не более $L(\Sigma)$ добавочных переменных). Очевидно, $L^*(\Sigma)\leqslant L(\Sigma)$ и т.д. Наконец, через $\lambda(\Sigma)$ будем обозначать количество дизъюнкций в системе Σ.

Основные результаты настоящей работы относятся к установлению связей между введенными величинами.

Теорема 4. Для любого числа c, меньшего $\frac{1}{4}$, и любого n найдется противоречивая система дизъюнкций Σ, для которой

$$\log_2 L(\Sigma) \geqslant c(\log_2 \overline{N}(\Sigma))^2 > n,$$

$$\log_2 L(\Sigma) \geqslant c(\log_2 L^*(\Sigma))^2 > n.$$

Теорема 5. Существует такое положительное c, что для любого n найдется противоречивая система дизъюнкций Σ, для которой

$$\log_2 \overline{N}(\Sigma) \geqslant c\sqrt[3]{\overline{N}^*(\Sigma)} > n,$$

$$\log_2 \overline{N}(\Sigma) \geqslant c\sqrt{\lambda(\Sigma)} > n.$$

Из этих теорем следует, в частности, что $L(\Sigma)$ не мажорируется никакой степенной функцией от $\overline{N}(\Sigma)$ и $L^*(\Sigma)$, а $\overline{N}(\Sigma)$, в свою очередь, не мажорируется никакой степенной функцией от $\overline{N}^*(\Sigma)$ и $\lambda(\Sigma)$ (и подавно такой функцией не мажорируется $L(\Sigma)$). Было бы чрезвычайно интересно установить аналогичное соотношение между $\overline{N}^*(\Sigma)$ и $\lambda(\Sigma)$, однако методами, примененными в настоящей работе, этого сделать не удается. Способ построения систем дизъюнкций, удовлетворяющих соотношениям теорем 4 и 5, описан в следующих параграфах.

Можно установить некоторую связь между рассматриваемыми здесь величинами и характеристиками выводов для исчисления высказываний в секвенциальной форме при помощи следующей конструкции. Пусть дан вывод некоторой формулы в секвенциальном исчислении. Каждой формуле, являющейся членом какой-либо из секвенций этого вывода, поставим в соответствие некоторую переменную (сопряженные переменные соответствуют лишь таким формулам, из которых одна является отрицанием другой). Заменив в каждой секвенции все формулы соответствующими переменными и перенеся все члены в сукцедент (разумеется, с заменой переменных на сопряженные), получим дерево, состоящее из дизъюнкций. Если ввести аксиомы таким же способом, как было описано при рассмотрении перехода от обычной формулы к системе дизъюнкций, то полученное дерево можно легко перестроить в вывод пустой дизъюнкции из этих аксиом в исчислении $\mathfrak{A}$. Если в исходном выводе не было сечений, то набор аксиом для вывода в $\mathfrak{A}$ может быть построен только по подформулам конечной формулы исходного вывода; отсюда видна аналогия между использованием правила сечения и использованием правила расширения системы аксиом перед выводом в $\mathfrak{A}$. Аналогом понятия регулярного вывода в $\mathfrak{A}$ оказывается понятие прополотого вывода в секвенциальном исчислении, вводимое в [2] (это понятие формулируется в терминах ограничений на повторения боковых формул на одной ветви вывода).

Различным ограничениям на вывод, описанным в терминах исчисления $\mathfrak{A}$, можно дать и некоторую эвристическую интерпретацию. Так, рассмотрение L -сложности вместо N -сложности соответствует, очевидно, запрещению многократно использовать в доказательстве один раз полученный результат (для вторичного его использования нужно повторить все доказательство этого промежуточного результата). Использование правила расширения соответствует допущению вспомогательных построений в доказательстве. Наконец, условие регулярности можно интерпретировать как требование не доказывать промежуточных результатов в более сильной форме, чем они потом используются (если A и B - такие дизъюнкции, что $A \subseteq B$, то A можно считать более сильным утверждением; если в выводе дизъюнкции, содержащей переменную ξ, происходит ее аннигиляция, то можно обойтись без этой аннигиляции, при этом в выводе часть дизъюнкций заменится на "более слабые" дизъюнкции, содержащие ξ ж)). Доказанные теоремы проливают некоторый свет на влияние упомянутых ограничений на сложность доказательства.

§ 2. Системы дизъюнкций, связанные с графами

Под г р а ф о м жж) мы будем здесь понимать конечный симметрический (т.е. неориентированный) граф без петель (не обязательно связный). Будем считать, кроме того, что каждому ребру графа соответствует некоторая пара сопряженных переменных (разным ребрам соответствуют разные пары).

Р а з м е ч е н н ы м г р а ф о м будем называть граф, снабженный следующей дополнительной информацией: каждой вершине приписано одно из двух логических значений (0 или 1), а для каждого ребра из соответствующей пары сопряженных переменных выбрана одна переменная. Если Φ – размеченный граф, то исходный граф

ж) Впрочем, в процессе такой перестройки вывода наряду с появлением ξ возможно и выпадение некоторых переменных.

жж) Используем терминологию из [1] .

(без разметки) обозначаем $|\Phi|$.

Пусть переменные $\xi_1,\ldots,\xi_k$ $(k \geq 0)$ все различны и среди них нет сопряженных друг другу, и пусть ε есть 0 или 1. Через $[\xi_1 \ldots \xi_k]^{\varepsilon}$ обозначаем систему дизъюнкций, состоящую из всех дизъюнкций, построенных из переменных $\xi_1,\ldots,\xi_k$ и им сопряженных и удовлетворяющих следующим условиям: 1) при каждом i $(1 \leq i \leq k)$ в дизъюнкцию входит ξ_i или $\bar{\xi}_i$, но не обе переменные сразу, 2) количество тех i, для которых в дизъюнкцию входит $\bar{\xi}_i$, противоположно по четности числу ε. При $k > 0$ система $[\xi_1 \ldots \xi_k]^{\varepsilon}$ состоит, очевидно, из 2^{k-1} дизъюнкций. Далее, если переменным $\xi_1,\ldots,\xi_k$ приписаны логические значения соответственно $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$, то для того, чтобы все дизъюнкции из $[\xi_1 \ldots \xi_k]^{\varepsilon}$ были истинными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus \varepsilon_k = \varepsilon$$

(знак $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2).

Пусть Φ - размеченный граф. Для каждой вершины Φ построим системы дизъюнкций $[\xi_1 \ldots \xi_k]^{\varepsilon}$, где ε - логическое значение, приписанное данной вершине, а $\xi_1,\ldots,\xi_k$ - переменные, выбранные для всех ребер, инцидентных этой вершине. Объединение таких систем дизъюнкций для всех вершин Φ обозначим $\alpha(\Phi)$. Через $\sigma(\Phi)$ обозначим сумму по модулю 2 логических значений, приписанных всем вершинам Φ.

Выясним, в какой мере свойства системы дизъюнкций $\alpha(\Phi)$ зависят от графа $|\Phi|$. Заметим прежде всего, что если в Φ изменить разметку одного ребра (т.е. выбрать для него переменную, сопряженную прежней) и одновременно изменить логические значения на концах этого ребра, то $\alpha(\Phi)$ не изменится. Аналогично, если две вершины Φ связаны некоторой (простой) цепью, то можно, не изменяя $\alpha(\Phi)$, поменять логические значения в обеих этих вершинах, изменив одновременно разметку всех ребер, входящих в эту цепь. Отсюда следует, что если $|\Phi|$ - связный граф, то любое изменение логических значений в вершинах Φ, сохраняющее $\sigma(\Phi)$, можно скомпенсировать надлежащим изменением разметки ребер так, чтобы $\alpha(\Phi)$ не изменилась. Отсюда получаем, что если граф $|\Phi|$ связный и $\sigma(\Phi)=0$, то система дизъюнкций $\alpha(\Phi)$ выполнима: в самом деле, тогда можно считать, что всем вершинам приписаны логические значения 0 и для того, чтобы сделать все дизъюнкции из $\alpha(\Phi)$ истинными, достаточно всем переменным, выбранным для ребер, также приписать значение 0. Напротив, если $\sigma(\Phi)=1$, то система дизъюнкций $\alpha(\Phi)$ противоречива. Действительно, если бы можно было приписать переменным значения так, чтобы все дизъюнкции из $\alpha(\Phi)$ были истинными, то для каждой вершины сумма по модулю 2 значений переменных, приписанных всем ребрам, сходящимся в этой вершине, была бы равна логическому значению, приписанному этой вершине; если сложить по модулю 2 такие равенства для всех вершин, то получим в левой части 0, так как значение переменной для каждого ребра входит в сумму ровно два раза, а в правой части будет $\sigma(\Phi)$, т.е. 1.

Таким образом, если дан связный граф Γ, то всякому размеченному графу Φ, такому что $|\Phi|=\Gamma$ и $\sigma(\Phi)=1$, соответствует противоречивая система дизъюнкций $\alpha(\Phi)$. При этом системы дизъюнкций, соответствующие различным таким Φ, могут быть получены одна из другой переименованием переменных, так что по существу свойства системы дизъюнкций $\alpha(\Phi)$ полностью определяются графом Γ. Значения введенных в § I функций L, N, $\overline{N}$, L^*, N^*, $\overline{N}^*$ и λ для системы дизъюнкций $\alpha(\Phi)$, где $|\Phi| = \Gamma$ и $\sigma(\Phi) = 1$, зависят только от Γ, ввиду чего мы будем обозначать их соответственно $L(\Gamma)$, $N(\Gamma)$, $\overline{N}(\Gamma)$, $L^*(\Gamma)$, $N^*(\Gamma)$, $\overline{N}^*(\Gamma)$ и $\lambda(\Gamma)$.

Величина $\lambda(\Gamma)$ легко вычисляется непосредственно. Для $\overline{N}^*(\Gamma)$ можно получить верхнюю оценку на основании того, что проведенное выше рассуждение, доказывающее противоречивость системы дизъюнкций $\alpha(\Phi)$ при помощи сложения по модулю 2, может быть формализовано в исчислении $\mathfrak{A}$ с правилом расширения системы аксиом; это дает для $\overline{N}^*(\Gamma)$ верхнюю оценку в виде линейной функции от $\lambda(\Gamma)$ и произведения числа ребер графа Γ на число его вершин. Верхняя оценка $L^*(\Gamma)$, получаемая таким же способом, оказывается значительно хуже: в общем случае она содержит число ребер в показателе степени при 2. Можно заметить также, что каждая из упомянутых величин не меньше, чем число вершин графа Γ, так как в любом выводе Λ из $\alpha(\Phi)$ для каждой из вершин Φ используется хотя бы по одной аксиоме.

Что же касается величин $L(\Gamma)$ и $\overline{N}(\Gamma)$, то для них удается написать точные рекуррентные формулы.

Будем употреблять букву a в качестве переменной для ребер графов; буквы Γ и Δ (возможно, с индексами) будут служить переменными для связных графов. Если a — ребро некоторого графа Γ (пишем $a \in \Gamma$), то частичный граф, получаемый удалением этого ребра из Γ (при сохранении всех вершин), или связный, и в этом случае мы будем обозначать его Γ_a, или же распадается на две связные компоненты, которые мы в этом случае будем обозначать (в произвольном порядке) Γ'_a и Γ''_a (в последнем случае мы будем говорить, что ребро a разрывает Γ).

Теорема 6. Имеет место следующая рекуррентная формула:

$$L(\Gamma)=\begin{cases} 1, \text{ если } \Gamma \text{ состоит только из одной вершины,} \\ \min\limits_{a\in\Gamma} L^a(\Gamma) \text{ в противном случае,}\end{cases}$$

где

$$L^a(\Gamma)=\begin{cases} 2L(\Gamma_a), \text{ если } a \text{ не разрывает } \Gamma, \\ L(\Gamma'_a)+L(\Gamma''_a) \text{, если } a \text{ разрывает } \Gamma.\end{cases}$$

Для того, чтобы написать рекуррентную формулу для $\overline{N}(\Gamma)$, введем следующие понятия. Цикломатическим числом графа Ξ (обозначение $\nu(\Xi)$) называется число ребер графа минус число вершин плюс число компонент связности (т.е. цикломатическое число – это ранг одномерной группы циклов). Пусть Δ – частичный подграф графа Γ. Будем говорить, что ребро a графа Γ выходит из Δ, если a не принадлежит Δ, но имеет с Δ хотя бы одну общую вершину. Через $\Gamma\setminus\Delta$ будем обозначать подграф Γ, получаемый удалением всех вершин Δ (вместе со всеми ребрами, инцидентными этим вершинам). Введем обозначение

$$S_\Gamma(\Delta)=\nu(\Gamma)-\nu(\Delta)-\nu(\Gamma\setminus\Delta).$$

Легко видеть, что $S_\Gamma(\Delta)$ – это максимальное число ребер, выходящих из Δ, которые можно удалить из графа Γ, не нарушая его связности. Определим на частичных подграфах графа Γ функцию Z_Γ следующим образом:

$$Z_\Gamma(\Delta)=\begin{cases} 2^{S_\Gamma(\Delta)}, & \text{если } \Delta \text{ состоит только из одной вершины} \\ 2^{S_\Gamma(\Delta)}+\min\limits_{a\in\Delta} Z_\Gamma^a(\Delta) & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где

$$Z_\Gamma^a(\Delta)=\begin{cases} Z_\Gamma(\Delta_a), & \text{если } a \text{ не разрывает } \Delta, \\ Z_\Gamma(\Delta_a')+Z_\Gamma(\Delta_a''), & \text{если } a \text{ разрывает } \Delta. \end{cases}$$

<u>Теорема 7.</u> Для всякого связного графа Γ

$$\overline{N}(\Gamma)=Z_\Gamma(\Gamma).$$

Наметим основные этапы доказательства теорем 6 и 7. Далее дизъюнкции будут рассматриваться только такие, в которые не входят одновременно две сопряженные пропозициональные переменные; в качестве переменных для таких дизъюнкций мы будем использовать буквы A, B, C. Буква Σ будет служить переменной для систем дизъюнкций, буквы Φ, Ψ – для связных размеченных графов, буквы ξ, η – для пропозициональных переменных.

Через $\Sigma\setminus\xi$ будем обозначать систему дизъюнкций, полученную из Σ следующим образом: те дизъюнкции из Σ, в которые входит $\bar{\xi}$, выбрасываются, а из остальных дизъюнкций вычеркивается ξ (если она там была).

Лемма I. Если дан регулярный вывод одноэлементной дизъюнкции ξ из системы дизъюнкций Σ , то при вычеркивании всех вхождений ξ из этого вывода получается регулярный вывод Λ из $\Sigma \setminus \xi$.

Лемма 2. Если $\Sigma \setminus \xi \vdash \Lambda$, то имеет место хотя бы одна из двух возможностей:

1) $\Sigma \vdash \xi$ и $L_{\xi}(\Sigma) \leq L(\Sigma \setminus \xi)$,

2) $\Sigma \vdash \Lambda$ и $L(\Sigma) \leq L(\Sigma \setminus \xi)$.

Через $\Phi \setminus \xi$ будем обозначать размеченный граф, получаемый из Φ следующим образом: I) если для одного из ребер Φ выбрана переменная ξ , то из Φ удаляется это ребро (все вершины сохраняются); 2) если для одного из ребер Φ выбрана переменная $\bar{\xi}$, то из Φ удаляется это ребро, и одновременно логические значения, приписанные концам этого ребра, заменяются на противоположные; 3) в остальных случаях $\Phi \setminus \xi = \Phi$. Заметим, что для любых ξ , η , таких что $\eta \neq \bar{\xi}$, и для любого Φ

$$(\Phi \setminus \xi) \setminus \eta = (\Phi \setminus \eta) \setminus \xi .$$

Ввиду этого мы можем определить выражение $\Phi \setminus A$ для любых Φ и A индукцией по числу переменных в A :

$$\Phi \setminus \Lambda = \Phi ,$$

$$\Phi \setminus A\xi = (\Phi \setminus A) \setminus \xi .$$

Аналогичным способом определяется система дизъюнкций $\Sigma \setminus A$ для любых Σ и A.

Лемма 3. $\sigma(\Phi \setminus A) = \sigma(\Phi)$.

Лемма 4. $\alpha(\Phi \setminus A) = \alpha(\Phi) \setminus A$.

Лемма 5. Если Ξ — несвязный размеченный граф и дан вывод некоторой дизъюнкции из $\alpha(\Xi)$, то в Ξ можно указать такую компоненту связности Ψ, что данный вывод является выводом из $\alpha(\Psi)$.

Доказательство теоремы 6 основано на леммах 1 - 5, причем леммы 3 и 4 используются только для одноэлементной дизъюнкции A.

Далее под Φ будем понимать некоторый фиксированный размеченный граф, такой что $|\Phi| = \Gamma$ и $\sigma(\Phi) = 1$. Если для некоторого ребра Φ выбрана переменная ξ или $\bar{\xi}$, то это ребро будем обозначать $|\xi|$. Будем называть дизъюнкцию A допустимой (для Φ), если в размеченном графе $\Phi \setminus A$ имеется ровно одна компонента связности Ψ, для которой $\sigma(\Psi) = 1$. Эту компоненту связности будем обозначать Φ_A.

Лемма 6. Если дизъюнкция A допустима и $|\xi| \in |\Phi_A|$, то дизъюнкция $A\xi$ также допустима и $\Phi_{A\xi}$ является компонентой связности $\Phi_A \setminus \xi$.

Пусть $\mathfrak{D}$ – некоторый фиксированный регулярный вывод Λ из $\alpha(\Phi)$. *Индексом вхождения поддерева $\mathfrak{D}'$ в дерево $\mathfrak{D}$* будем называть дизъюнкцию, определяемую следующим образом: 1) индекс вхождения $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}$ есть Λ; 2) если A – индекс вхождения $\mathfrak{D}'$ в $\mathfrak{D}$, посылки последнего шага в $\mathfrak{D}'$ имеют вид $B\xi$ и $C\bar{\xi}$ а их поддеревья – $\mathfrak{D}'_1$ и $\mathfrak{D}'_2$, то индексом соответствующего вхождения $\mathfrak{D}'_1$ будет $A\xi$ (а индексом вхождения $\mathfrak{D}'_2$ - соответственно $A\bar{\xi}$). *Индексом вхождения дизъюнкции в $\mathfrak{D}$* будем называть индекс вхождения соответствующего поддерева.

Лемма 7. *Если A – индекс вхождения поддерева $\mathfrak{D}'$ в $\mathfrak{D}$, то*

1) дизъюнкция A допустима,

2) если из $\mathfrak{D}'$ вычеркнуть все вхождения переменных, входящих в заключение $\mathfrak{D}'$, то получится регулярный вывод Λ из $\alpha(\Phi_A)$.

Доказательство индукцией по A с использованием лемм 1 и 4-6.

Лемма 8. *Если A – индекс вхождения в $\mathfrak{D}$ поддерева, состоящего только из одной аксиомы, то Φ_A состоит только из одной вершины.*

Это следствие леммы 7.

Пусть A – допустимая дизъюнкция. Через $\delta(A)$ обозначим множество таких ξ, что $\xi \in A$ и ребро $|\xi|$ имеет общую вершину с Φ_A (в $\delta(A)$ столько переменных, сколько ребер выходит из

$|\Phi_A|$ как частичного подграфа Γ). Следующая лемма показывает, что по индексу вхождения дизъюнкции в $\mathfrak{D}$ можно найти эту дизъюнкцию, не зная самого $\mathfrak{D}$.

Лемма 9. Если A — индекс вхождения некоторой дизъюнкции B в $\mathfrak{D}$, то $B=\delta(A)$.

Доказательство основано на лемме 7.

Лемма 10. Если A — допустимая дизъюнкция и $\delta(A)\subseteq B\subseteq A$, то дизъюнкция B также допустима, $\Phi_B=\Phi_A$ и $\delta(B)=\delta(A)$.

Лемма 11. Пусть A — индекс вхождения в $\mathfrak{D}$ некоторого поддерева $\mathfrak{D}'$. Тогда для любой дизъюнкции B

$$\sum_C 2^{\nu(|\Phi\setminus C|)}\leq 2^{\nu(|\Phi\setminus(A\cup B)|)},$$

где суммирование ведется по индексам C всех вхождений дизъюнкции B в $\mathfrak{D}$, относящихся к поддереву $\mathfrak{D}'$.

Доказательство индукцией по L -сложности $\mathfrak{D}'$. Используются леммы 9 и 10, а также следующий факт: при удалении ребра из графа его цикломатическое число остается неизменным, если удаляемое ребро разрывает одну из компонент связности, и уменьшается на 1 в противном случае (см. [1 : гл.4, теорема 1]).

Лемма 12. Для любой дизъюнкции B

$$\sum_C 2^{\nu(|\Phi\setminus C|)-\nu(|\Phi\setminus B|)}\leq 1,$$

где суммирование ведется по индексам C всех вхождений дизъюнкции B в $\mathfrak{D}$.

Лемма 13. N - сложность вывода $\mathfrak{D}$ не меньше

$$\sum_{C} 2^{\nu(|\Phi \setminus C|) - \nu(|\Phi \setminus \delta(C)|)}$$

где суммирование ведется по индексам C всех вхождений дизъюнкций в $\mathfrak{D}$.

Лемма 14. Если A - индекс вхождения в $\mathfrak{D}$ некоторого поддерева $\mathfrak{D}'$, то

$$2^{\nu(\Gamma)} \cdot \sum_{C} 2^{\nu(|\Phi \setminus C|) - \nu(|\Phi \setminus \delta(C)|)} \geq 2^{\nu(|\Phi \setminus A|)} \cdot Z_{\Gamma}(|\Phi_A|),$$

где суммирование ведется по индексам C всех вхождений дизъюнкций в $\mathfrak{D}$, относящихся к поддереву $\mathfrak{D}'$.

При помощи лемм 13 и 14 легко доказывается, что $\overline{N}(\Gamma) \geq Z_{\Gamma}(\Gamma)$. Для доказательства обратного неравенства выделим в каждом связном частичном подграфе Δ графа Γ, имеющем более одной вершины, ребро a, минимизирующее $Z^{a}_{\Gamma}(\Delta)$. Введем понятие правильного частичного подграфа графа Γ следующим образом: Γ - правильный; если Δ - правильный и в Δ выделено ребро a, то Δ_a (если a не разрывает Δ), Δ'_a и Δ''_a (если a разрывает Δ) — правильные. Будем говорить, что дизъюнкция A принадлежит частичному подграфу Δ графа Γ, если A допустима, $\delta(A)=A$ и $|\Phi_A|=\Delta$. Тогда неравенство $\bar{N}(\Gamma)\le Z_r(\Gamma)$ сразу вытекает из следующих трех утверждений.

<u>Лемма 15.</u> Можно построить регулярный вывод Λ из $\alpha(\Phi)$, в который входят только дизъюнкции, принадлежащие правильным частичным подграфам графа Γ.

<u>Лемма 16.</u> Количество различных дизъюнкций, принадлежащих частичному подграфу Δ графа Γ, равно $2^{S_r(\Delta)}$.

<u>Лемма 17.</u>

$$Z_r(\Gamma)=\sum_{\Delta} 2^{S_r(\Delta)},$$

где суммирование ведется по всем правильным частичным подграфам Δ графа Γ.

§ 3. Оценки для конкретных графов

Будем рассматривать графы $P_{k\ell}$ (где k и ℓ — целые положительные), определяемые следующим образом: вершинами графа $P_{k\ell}$ являются точки плоскости с целочисленными координатами

x, y, такими что $1 \le x \le k$ и $1 \le y \le \ell$ (всего $k\ell$ вершин) а ребра изображаются отрезками единичной длины, параллельными осям координат. Обычно мы будем считать, что $k \geqslant \ell$.

Теорема 8. Существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что для любых целых положительных k и ℓ

$$\left(\frac{c_1 k}{\ell}\right)^{\ell} < L(P_{k\ell}) < \left(\frac{c_2 k}{\ell}\right)^{\ell}.$$

Приведем основные этапы доказательства этой теоремы.

Лемма 18. Пусть Γ' — связный частичный подграф графа Γ, а Δ — связный частичный подграф Γ'. Тогда

$$S_{\Gamma}(\Delta) \geqslant S_{\Gamma'}(\Delta).$$

Фиксируем некоторое ℓ, большее 1, а также некоторое достаточно большое m; полагаем $\Gamma = P_{m\ell}$. Пусть Δ — связный частичный подграф Γ. Через $w(\Delta)$ обозначаем количество различных абсцисс вершин Δ. Называем Δ внутренним графом, если в Δ нет вершин с абсциссами 1 и m.

Лемма 19. Пусть Δ — внутренний граф и ребро a разрывает Δ. Тогда

$$S_\Gamma(\Delta)-S_\Gamma(\Delta'_a)\geq\begin{cases}\ell-1, & \text{если в } \Delta''_a \text{ есть вершины со всеми целыми ординатами от } 1 \text{ до } \ell,\\ w(\Delta)-w(\Delta'_a) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В доказательстве используется лемма 18, а также следующее соотношение:

$$S_\Gamma(\Delta)-S_\Gamma(\Delta'_a)=S_{\Gamma\setminus\Delta'_a}(\Delta''_a).$$

<u>Лемма 20</u>. Если константа C такова, что неравенство

$$L(\Delta)\geq C\cdot 2^{-S_\Gamma(\Delta)}\cdot(w(\Delta))^\ell$$

выполняется для всех внутренних графов Δ, удовлетворяющих условию $w(\Delta)<2\ell$, то оно выполняется вообще для всех внутренних графов Δ.

Доказательство индукцией по числу ребер Δ с использованием теоремы 6 и леммы 19.

Подобрав подходящее значение C, мы при помощи леммы 20 получим требуемую нижнюю оценку $L(P_{k\ell})$ (при $k\leq m-2$). Верхняя оценка для $L(P_{k\ell})$ получается на основе теоремы 6 непосредственно: нужно из $P_{k\ell}$ последовательно удалять ребра так, чтобы граф $P_{k\ell}$ оказался разрезанным поперек оси абсцисс на две примерно равные части.

Следующие оценки получаются также непосредственным подсчетом:

$$\bar{N}(P_{k\ell}) \le ck\ell \cdot 2^{\ell},$$

$$L^*(P_{k\ell}) \le ck\ell \cdot 2^{\ell},$$

$$\bar{N}^*(P_{k\ell}) \le ck\ell^2,$$

$$\lambda(P_{k\ell}) \le ck\ell$$

(здесь c – некоторая константа). Для получения оценки $\bar{N}(P_{k\ell})$ можно воспользоваться теоремой 7; на этот раз надо последовательно удалять из $P_{k\ell}$ ребра "с краю", так чтобы вершины "отпадали" по одной в порядке возрастания абсцисс. Для построения достаточно простых выводов с применением правила расширения системы аксиом можно использовать следующую идею (фактически приведенные оценки были получены при помощи несколько иной конструкции). Дополнительные аксиомы строятся так, чтобы по существу для каждого целого m, такого что $1 \le m < k$, определялась новая переменная ξ_m, значение которой должно быть равно сумме по модулю 2 значений всех переменных, выбранных для ребер, соединяющих вершины с абсциссами m и $m+1$; затем вначале выводятся простые соотношения между ξ_m и ξ_{m+1} (сложность такого вывода зависит только от ℓ), а уже из них выводится Λ.

Теперь для доказательства теоремы 4 достаточно рассмотреть граф $P_{k\ell}$ при $k=\ell \cdot 2^{\ell}$. Теорема 5 получается, если положить $k=\ell$ и использовать следующую теорему.

<u>Теорема 9.</u> При всяком целом положитель-

н о м k

$$\overline{N}(P_{kk}) \geq 2^{k-1}.$$

Для доказательства положим $\Gamma = P_{kk}$ и вновь воспользуемся понятием правильного частичного подграфа, введенным для доказательства теоремы 7. Ввиду теоремы 7 и леммы 17 наше утверждение будет доказано, если будет найден такой частичный подграф Δ графа Γ, что $S_\Gamma(\Delta) \geq k-1$. Для нахождения такого Δ будем строить правильные частичные подграфы Γ последовательным удалением ребер из Γ; каждый раз, когда удаляемое ребро разрывает рассматриваемый частичный подграф, мы будем выбирать ту из компонент, которая имеет больше общих вершин с "периметром" (любую, если поровну). Таким способом можно построить правильный частичный подграф, у которого количество общих вершин с "периметром" больше $\frac{4}{3}(k-1)$, но не больше $\frac{8}{3}(k-1)$; он и будет искомым.

Литература

1. Берж К. Теория графов и ее применения. ИЛ, М., 1962.
2. Шанин Н.А., Давыдов Г.В., Маслов С.Ю., Минц Г.Е., Оревков В.П. Слисенко А.О. Алгоритм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний. Изд. "Наука", М.-Л., 1965.
3. Robinson J.A. A machine-oriented logic based on resolution principle. "J.Assoc. Comput. Mach.", 1965, 12, № 1, 23-41.